

灰色~周期外延组合模型 在吉兰太盐湖卤水动态预测中的应用

程维明 张明刚

(中国科学院青海盐湖所, 西宁, 810008)

摘要 本文利用灰色预测和周期外延预测模型的优点, 提出了灰色预测与周期外延预测相结合的灰色~周期外延组合模型, 对吉兰太盐湖卤水的动态变化进行了模拟, 结果可靠, 该模型可广泛应用于地下水动态预测和其它序列预测。

关键词 盐湖卤水 灰色模型 周期外延模型 组合模型

分类号 P612

1 问题的提出

吉兰太盐湖属于内陆现代盐湖, 多年来, 由于自然环境和人类活动, 特别是受干旱气候条件的影响, 自然补给水量减少, 加之大面积裸露开采加剧了卤水水面的垂直蒸发, 从而导致了盐湖卤水水位的下降。且卤水水位与大气降水联系密切, 因大气降水随季节变化, 并呈现以年为周期的波动, 从而使卤水水位也呈周期波动, 在这种情况下, 如果单纯运用灰色预测模型就不能反应卤水周期波动的特点, 如果单纯动用周期外延预测模型又不能反应总体增大和减小的变化趋势。

1.1 湖区卤水变化的基本情况

为了反应湖区卤水的动态变化, 我们选择了具有代表性的 I_{2-2} 孔, I_{2-2} 钻孔自 1992—1997 年期间每年 3、6、9 月份地下水位平均值及其变化见表 1、图 1, 由图、表可以看出, 地下水位呈明显的季节性周期变化, 6 月份为最枯月水位, 9 月份为最丰月水位, 3 月份地下水位介于二者之间。

表 1 I_{2-2} 观测孔历年水位变化值

Table 1 Actually measured groundwater level values of I_{2-2} drilling hole

年(a)	1992	1993	1994	1995	1996	1997
3(月)	14.450	14.520	14.500	14.580	14.550	14.640
6(月)	14.510	14.510	14.540	14.570	14.573	14.370
9(月)	14.610	14.600	14.750	14.750	14.760	14.400

注: 为计算方便, 水位值取参考面为 $Z=1010.0\text{m}$, 水位值单位: m

收稿日期 1998—10—07

具有象吉兰太盐湖卤水特征的水位动态例子很多,它们主要与大气降水有密切关系。预测水位动态变化的模型很多,最常用的有:有限差分法、三角形和四边形有限元法、边界元法等,这些方法需要对研究区域进行单元剖分,较简单的模型有灰色 GM(1,1)模型、周期外延模型,它们不需要剖分单元,现简单介绍如下:

1.2 灰色 GM(1,1)模型建模过程与结果分析

灰色 GM(1,1)模型是一种新方法,它是从一个时间序列自身出发进行建模的灰色预测模型,是 1 阶的、1 个变量的微分方程模型,已广泛应用于地下水动态预测中。

设系统某行为数列(要求非负)为: $x_0(k),k=1,2,\cdots,N$ 。其 GM(1,1)模型建模步骤如下:

(1)对原始数列 $x_0(k)$ 作一次累加生成 $x_1(k)=\sum_{m=1}^k x_0(m),k=1,2,\cdots,N$ 。

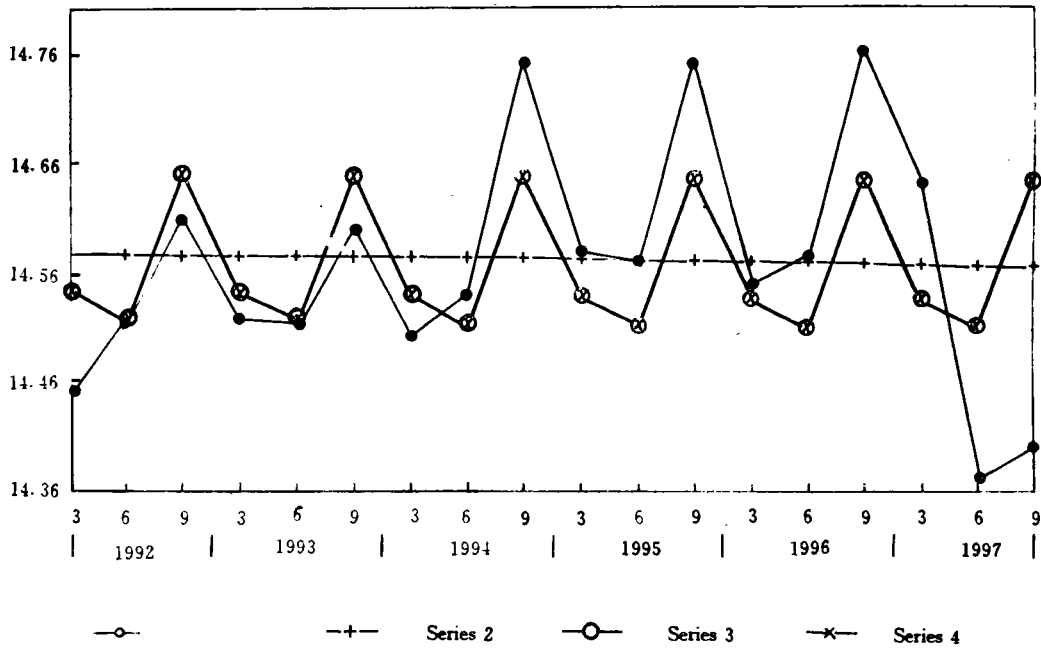


图 1 地下水位实测值与模型计算值对比曲线

Fig. 1 Curve of compasion between actually measured groundwater level values and those caculated through various models

1—卤水水位实测曲线;2—GM(1,1)模型计算曲线;3—周期外延预测模型计算曲线;4—灰色—周期外延组合预测模型计算曲线

(2)构造矩阵 B 和 Y

$$B=\begin{bmatrix} -1/2 & (x_1(1)+x_1(2)) & 1 \\ -1/2 & (x_1(2)+x_1(3)) & 1 \\ & \cdots \cdots : & \\ & \cdots : & \\ -1/2 & (x_1(N-1)+x_1(N)) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix} x_0(2) \\ x_0(3) \\ : \\ x_0(N) \end{bmatrix}$$

(3)求模型中系数向量

$$(ab)^T=(B^TB)^{-1}B^TY$$

(4)建立模型

$$\bar{x}_1(k+1)=[x_1(0)-b/a]e^{-ak}+b/a$$

其中 $x_1(0)=x_0(1), k=0,1,\dots,N-1$ 。

(5)还原模型

$$\bar{x}(k)=\bar{x}_1(k)-\bar{x}_1(k-1)$$

或 $\bar{x}(k+1)=-a(x_0(1)-b/a)e^{-ak}$

(6)精度检验 方法有相对误差法、关联度法、反演算法等。若拟合后精度达到要求,即可进行预报。有时,再建立一个 GM(1,1)残差修正模型,以提高拟合精度。

I₂₋₂孔原始序列建立的 GM(1,1)模型:

$$\bar{x}(k+1)=4.579e^{0.00005360478K}$$

表 2 GM(1,1)模型拟合结果
Table 2 Fitting results of the GM(1,1) model

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
实测值(m)	14.450	14.510	14.610	14.520	14.510	14.600	14.500	14.540	14.750
计算值(m)	14.579	14.578	14.577	14.577	14.576	4.575	14.574	14.574	14.573
相对误差(%)	-0.892	-0.470	0.223	-0.390	-0.454	0.170	-0.513	-0.21	1.201

序号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
实测值(m)	14.580	14.570	14.750	14.550	14.573	14.760	14.640	14.370	14.400
计算值(m)	14.572	14.571	14.571	14.570	14.569	14.568	14.568	14.567	14.566
相对误差(%)	0.054	-0.010	1.216	-0.137	0.026	1.298	0.494	-1.370	-1.154

此模型是一指数形式,反映序列总体变化趋势。GM(1,1)模型的拟合误差见表 2。从表 2、图 1 可以看出:(1)正误差基本上是每隔两个数据出现一次,即周期出现(按序号,周期 M=3),说明 GM(1,1)模型没有反应序列周期波动的现象;(2)GM(1,1)模型基本能反应序列总体变化趋势,即地下水位有逐年下降之势;(3)拟合结果:相对误差绝对值多数在 0~1.5%之间。作为趋势预报是可以的,而作为地下水位短期或长期预报,精度偏低,且不能正确反应地下水位动态特征。

1.3 周期外延预测模型建模过程与结果分析

现简单介绍周期叠加外推法建模步骤:

设系统某行为: $x(k), k=0, 1, \dots, N$

(1) 计算均值生成函数 均值生成函数计算式:

$$\bar{x}_m(i) = \left(\sum_{j=0}^{n_m-1} x(i+jm) \right) / n_m \quad (i=1, 2, \dots, m, 1 \leq m \leq M)$$

式中 $n_m = N/m, M = N/2$, 表示取整数, 组成的一个均值生成函数矩阵:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(1) & \bar{x}_2(1) & \bar{x}_3(1) & \cdots & \bar{x}_M(1) \\ & \bar{x}_2(2) & \bar{x}_2(2) & \cdots & \bar{x}_M(2) \\ & & \bar{x}_3(3) & \cdots & \bar{x}_M(3) \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & \bar{x}_M(M) \end{bmatrix}$$

对均值生成的函数 $\bar{x}_m(i)$ 作周期性延拓, 即令

$$f_m(k) = \bar{x}_m(k) \quad k \equiv i \pmod{m}, k=1, 2, \dots, N$$

这里 mod 表示同余, $f_m(k)$ 称作延拓均生函数。

(2) 提取优势周期

目前有如下两种方法:

i. 依方差分析基本原理, 可用下式来检验 $x(k)$ 是否隐含长度为 i^* 的周期。

$$F^{(m)} = (N-m)S^{(m)} / ((M-1)S)$$

为服从自由度 $(m-1, N-m)$ 的 F 分布。

$$\text{其中: } S^{(m)} = \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_m(i) - \bar{x})^2$$

$$n_i = N/i, \quad \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^N x(i) \right) / N$$

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x[i + (j-1)m] - \bar{x}_m(i))^2$$

对于事先给定的置信水平 α , 若 $F^{(m^*)} > F_{\alpha}(m^*-1, N-m)$, 则认为 $x(k)$ 隐含长度为 m^* 的优势周期。

ii 欲确定长度为 m^* 的优势周期, 只需取

$$S(m^*)/m^* = \max S(m)/m, 2 \leq m \leq M.$$

(3)由原始序列 $x(k)$ 减去周期 m^* 所对应的延拓均生函数构成一新序列,即

$$x'(k) = s(k) - f_{m^*}(k)$$

再对此新序列 $x'(k)$ 重复(2)、(3),可以进一步提取其它优势周期。

(4)叠加

假设寻找到五个周期,则令不同周期同一时刻取值的叠加 $\bar{x}(k) = f(k) = \sum_{i=1}^m f_{m_i}(k)$ 作为 $x(k)$ 的一个近似。这就是周期叠加外推法建立的周期外延预测模型。

对于 I_{2-2} 孔,按照上述建模步骤,首先建立均值生成函数,再计算 $F^{(m)}$ 值选取其中最大者。

由于 $F^{(3)} = 16.54 > F_{0.05}(2, 15) = 3.68$, 因此,序列的优势周期为 3; 然后从原始序列中减去周期 $M=3$ 对应的均值生成函数序列,对剩余序列重新构造均值生成函数,再计算 F 值,取最大者 $F^{(6)} = 1.28 < F_{0.05}(5, 12) = 3.11$, 故 $m=6$ 不是序列的第二优势周期。这样就确定了原序列的优势周期为 3。由前面的计算式:

$$\bar{x}(k) = f_3(k)$$

即为 I_{2-2} 孔地下水位的预测模型,其拟合效果如表 3。

表 3 周期外延预测模型拟合结果

Table 3 fitting results of the periodic extensional prediction model

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
实测值(m)	14.450	14.510	14.610	14.520	14.510	14.600	14.500	14.540	14.750
计算值(m)	14.540	14.512	14.645	14.540	14.512	14.645	14.540	14.512	14.645
相对误差(%)	-0.623	-0.015	-0.240	-0.138	-0.015	-0.308	-0.276	0.191	0.712
序号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
实测值(m)	14.580	14.570	14.750	14.550	14.573	14.760	14.640	14.370	14.400
计算值(m)	14.540	14.512	14.645	14.540	14.512	14.645	14.540	14.512	14.645
相对误差(%)	0.274	0.397	0.712	0.069	0.417	0.779	0.683	-0.989	-1.701

从表中可以看出,周期叠加外推法建立的预测模型对于 I_{2-2} 孔误差偏大。且由于周期外延预测模型不能反应序列总体趋势变小的原因,导致序列开始误差为负,后来误差为正。然而,周期外延预测模型却能表示序列周期波动的现象和趋势。

从灰色 GM(1,1)模型和周期外延预测模型分析结果看出,二者都有优缺点。把它们结合起来,可以取得很好的效果。

2 灰色~周期外延组合预测模型建模思想与建模步骤

由于灰色 GM(1,1)模型能够很好地反应序列的总体趋势,所以可首先建立序列的灰色 GM(1,1)模型,然后对剩余序列建立周期外延预测模型,作为灰色 GM(1,1)模型的残差补偿,这就是灰色~周期外延组合预测模型的建模思想。这样既能反应出序列总体变化趋势,又

能有效地反映出序列波动的特征。具体建模步骤如下:

设系统某行为数列(要求非负)为: $x(k), k=1, 2, \dots, N$

第一步,建立该序列的灰色 GM(1,1)模型为:

$$\begin{aligned}x(k) &= \bar{x}1(k) - \bar{x}(k-1) \\ \bar{x}(k) &= (x(1) - b/a)e^{-a(k-1)} + b/a \\ \text{或} \quad \bar{x}(k) &= -a(x(1) - b/a)e^{-a(k-1)}\end{aligned}$$

第二步 求剩余数列 $x'(k)$

$$\text{即} \quad x'(k) = x(k) - \bar{x}(k)$$

第三步 建立剩余数列 $x'(k)$ 的周期外延预测模型。具体步骤如上,最终建立的预测模型形式为:

$$f(k)' = \sum_{i=1}^m f_{mi}(k)$$

第四步 叠加把 $\bar{x}(k) = \bar{x}(k) + f(k)$ 作为列 $x(k)$ 的拟合。即为所建的灰色一周期外延组合预测模型。

对于 I_2-2 孔,所建模型如下:

(1)灰色 GM(1,1)模型为: $\bar{x}(k) = 14.579e^{-0.00005364078(k-1)}$

(2)剩余数列 $x'(k)$ 的计算结果如表 4。

表 4 剩余数列 $x'(k)$

Table 4 residual number series $x'(k)$

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
剩余值	-0.129	-0.068	0.033	-0.057	-0.066	0.025	-0.074	-0.034	0.177
序号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
剩余值	0.008	-0.001	0.179	-0.020	0.004	0.192	0.072	-0.197	-0.166

(3)剩余数列 $x'(k)$ 的周期外延预测模型提取优势周期 $m=3, F(3) = 3.70 > F_{0.05}(2, 15) = 3.68$ 。周期叠加外推法建立的周期外延预测模型为: $f(k) = f_3(k)$ 。经计算,均值生成函数为 $\bar{x}_3(1) = -0.033, \bar{x}_3(2) = -0.061, \bar{x}_3(3) = 0.073$ 。

(4)叠加形成的灰色~周期外延组合预测模型为

$$\begin{aligned}\bar{x}(k) &= \bar{x}(k) + f(k) \\ &= 14.579e^{-0.00005364078(k-1)} + f_3(k)\end{aligned}$$

表 5 灰色—周期外延组合预测模型拟合结果

Table5 Fitting results of grey~periodic extensional combinatorial prediction model

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
实测值(m)	14.450	14.510	14.610	14.520	14.510	14.600	14.500	14.540	14.750
计算值(m)	14.546	14.518	14.651	14.543	14.516	14.648	14.541	14.513	14.646
相对误差(%)	-0.662	-0.054	-0.278	-0.161	-0.038	-0.331	-0.284	0.184	0.704
序号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
实测值(m)	14.580	14.570	14.750	14.550	14.573	14.760	14.640	14.370	14.400
计算值(m)	14.539	14.511	14.644	14.537	14.509	14.642	14.534	14.507	14.639
相对误差(%)	0.282	0.405	0.720	0.092	0.441	0.802	0.722	-0.950	-1.662

上式即为 I_{2-2} 最终建立的灰色~周期外延组合预测模型。期拟合效果如表 5, 模型计算值曲线如图 1。从表 5 可以看出, 灰色—周期外延组合预测模型的拟合度要比灰色 GM(1,1) 模型、周期外延预测模型的拟合度都高(相对误差的绝对值大都在 0~1.0% 之间)。从图 1 也可明显看出, 灰色~周期外延组合预测模型计算值曲线与实测值曲线的相似程度远高于其它两种模型计算值曲线。利用该模型所预测的地下水动态变化趋势与利用有限元法所模拟的水位变化完全相似, 两种模型可以互相验证, 预测会更可靠。对 I_{2-2} 孔, 利用所建的模型, 预测了 1998—2007 年 10 年中 3 月、6 月、9 月的卤水位值, 列于表 6 中。从表 6 可以看出, 卤水总体上呈逐年下降的趋势, 且随着季节呈周期性变化。

表 6. I_{2-2} 孔 1998—2007 年地下水位预测值(m)Table6 caculated results of I_{2-2} drilling hole through
grey—peridic extensional combinatorial prediction model

年(a)	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
3(月)	14.532	14.530	14.528	14.525	14.523	14.521	14.519	14.516	14.514	14.512
6(月)	14.504	14.502	14.500	14.497	14.495	14.493	14.491	14.488	14.486	14.484
9(月)	14.637	14.635	14.633	14.630	14.628	14.626	14.624	14.621	14.619	14.617

3 结语

(1) 本文针对吉兰太盐湖卤水水位动态变化的特征, 提出了灰色预测与周期外延预测相结合的灰色—周期外延组合预测模型, 对 I_{2-2} 孔的水位计算, 拟合度高, 预测可靠。

(2) 本文介绍的灰色~周期外延组合预测模型的建模思想及建模步骤, 可广泛应用地下水动态预测及其它序列预测, 并且可用该模型来验证有限元法的预测结果。

- [1]内蒙古自治区环境地质研究所,内蒙古自治区吉兰太盐湖地下水水盐动态监测成果研究报告,1997.
- [2]内蒙古自治区环境地质研究所,吉兰太盐湖地下水水盐动态曲线图册,附件,1997,7.
- [3]左其亭,马军霞,地下水系统中的不确定性信息及其自理方法,水文地质与工程地质,1994.

The Application of Grey—Periodic Extensional Combinatorial Model to Dynamic Prediction of the Brine in Jilantai Salt Lake

Cheng Weiming, Zhang Minggang

(*Qinghai Institute of Salt Lakes, Academia Sinica, Xining 810008*)

Abstract

According to strong points of grey prediction and periodic extensional prediction, this paper puts forward the grey — periodic extensional combinatorial prediction. This model predicts dynamic variation of the brine in Jilantai Salt lake, the results are accurate. It can be extensively used in groundwater regime prediction and other sequential prediction.

Keywords Salt lake brine, Grey prediction, Periodic extensional Prediction, Combination model.